Das Arbitrage-Preis-Modell

von

HANS-JüRG BüTTLER
Schweizerische Nationalbank

In dieser Notiz wird das Arbitrage-Preis-Modell (APM) bzw. die Arbitrage-Preis-Theorie (APT)[1] erläutert. Zuerst wird die mathematische Lösung des APMs und anschließend die grafische Dargstellung gezeigt.

1. Die mathematische Lösung

Das aus n Wertpapieren bestehende Arbitrage-Portfolio benötigt kein Vermögen, deshalb ist die Summe der Gewichte des Arbitrage-Portfolios gleich null. Bezeichnet man mit $\boldsymbol{\eta} = [\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n]'$ den Spaltenvektor der Gewichte des Arbitrage-Portfolios und mit $\mathbf{e} = [1, 1, \ldots, 1]'$ den Identitäts-Spaltenvektor, dann lautet diese Bedingung:

$$\boldsymbol{\eta}'\mathbf{e} = \mathbf{e}'\boldsymbol{\eta} = \sum_{i=1}^{n} \eta_i = 0. \qquad (7.49b)$$

Das Arbitrage-Portfolio hat zudem kein faktor-bezogenes, d. h. systematisches Risiko. Bezeichnet man mit $\mathbf{B}$ die $(n \times k)$-Matrix der Faktorlasten, dann lautet diese Bedingung:

$$\boldsymbol{\eta}'\mathbf{B} = \mathbf{0}' \text{ bzw. } \mathbf{B}'\boldsymbol{\eta} = \mathbf{0}. \qquad (7.52)$$

Für ein gut diversifiziertes Arbitrage-Portfolio verschwindet das wertpapier-bezogene, d. h. unsystematische Risiko; vgl. Gl. (7.51). Faßt man den Identitätsvektor und die Matrix der Faktorlasten in der $([k+1] \times n)$-Matrix $\mathbf{M}'$ zusammen:

$$\underset{([k+1]\times n)}{\mathbf{M}'} \equiv \begin{bmatrix} \mathbf{e}' \\ \mathbf{B}' \end{bmatrix},$$

dann lassen sich die beiden Gleichungen (7.49b) und (7.52) als das Gleichungssystem (i) schreiben:

$$\mathbf{M}'\boldsymbol{\eta} = \mathbf{0} \text{ bzw. } \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ b_{11} & b_{21} & b_{31} & \cdots & b_{n1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{1k} & b_{2k} & b_{3k} & \cdots & b_{nk} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \\ \vdots \\ \eta_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}. \qquad (i)$$

---

[1] Englisch *arbitrage pricing theory* (APT).

Die Gewichte des Arbitrage-Portfolios, $\boldsymbol{\eta}$, bestimmen sich demzufolge als die Lösung eines linear-homogenen Gleichungssystems. Wir unterstellen, daß alle Vektoren der Faktorlasten, $\mathbf{b}_i$ [$i = 1, 2, \ldots, k$], und der Identitätsvektor, $\mathbf{e}$, linear unabhängig voneinander sind. Wegen der Konstruktion des Faktormodelles dürfte dies in der Regel zutreffen, ist jedoch für die nachfolgende Diskussion nicht von Bedeutung. In diesem Fall hat die Matrix $\mathbf{M}'$ vollen Rang. Der Rang ergibt sich aus der kleineren Zahl an Spalten und Zeilen der Matrix $\mathbf{M}'$. Weil die Anzahl der Wertpapiere, n, im APM wesentlich größer als die Zahl der Faktoren, k, sein sollte, ist der Rang der Matrix $\mathbf{M}'$, der mit r bezeichnet wird, gleich $k + 1$. Mit anderen Worten, es stehen nur r linear unabhängige Gleichungen zur Verfügung, während die Anzahl, n, der unbekannten Portfolio-Gewichte, $[\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n]$, weit größer ist, d. h. $n \gg r = k + 1$. Für die Lösung des Gleichungssystems (i) ziehen wir den folgenden Satz der linearen Algebra zu Hilfe; vgl. ZURMÜHL (1964, S. 93).

SATZ: *Ist der Rang, r, der Matrix $\mathbf{M}'$ kleiner als die Anzahl, n, der unabhängigen Variablen, $\boldsymbol{\eta}$, dann gibt es für das linear-homogene Gleichungssystem* (i) *immer eine nicht-triviale Lösung mit $\boldsymbol{\eta} \neq \mathbf{0}$. Bezeichnet man mit $d \equiv n - r$ den Rangabfall, dann lautet die Lösung*:

$$\boldsymbol{\eta} = c_1\boldsymbol{\eta}_1 + c_2\boldsymbol{\eta}_2 + \ldots + c_d\boldsymbol{\eta}_d, \tag{ii}$$

wobei $[c_1, c_2, \ldots, c_d]$ freie Konstante und $[\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \ldots, \boldsymbol{\eta}_d]$ linear unabhängige Fundamentallösungen bezeichnen.

Nach Gl. (i) stehen alle diese Lösungen, $\boldsymbol{\eta}$, senkrecht auf den Zeilenvektoren der Matrix $\mathbf{M}'$, d. h. die unendlich vielen Lösungen, $\boldsymbol{\eta}$, stehen senkrecht auf den Vektoren $[\mathbf{e}, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_k]$.[2] Weil das Arbitrage-Portfolio weder Vermögen benötigt noch Risiko hat, muß der Ertrag auf dem Arbitrage-Portfolio verschwinden. Diese Bedingung lautet:

$$\boldsymbol{\eta}' \mathscr{E}[\widetilde{\mathbf{X}}] = \mathscr{E}[\widetilde{\mathbf{X}}]' \boldsymbol{\eta} = 0. \tag{7.54}$$

Gemäß Gl. (7.54) steht aber auch der Vektor der Mittelwerte[3] der n Wertpapiere senkrecht auf den Lösungen. Deshalb muß der Mittelwerts-Vektor der Wertpapier-Ertragsraten, $\mathscr{E}[\widetilde{\mathbf{X}}]$, im gleichen Raum liegen, der durch die Vektoren der Matrix $\mathbf{M}'$, d. h. durch die linear unabhängigen Vektoren $[\mathbf{e}, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_k]$ aufgespannt wird. Er kann also als eine Linearkombination dieser Vektoren geschrieben werden:

$$\begin{aligned} \mathscr{E}[\widetilde{\mathbf{X}}] &= \lambda_0\mathbf{e} + \lambda_1\mathbf{b}_1 + \lambda_2\mathbf{b}_2 + \ldots + \lambda_k\mathbf{b}_k, \\ \mathscr{E}[\widetilde{X}_i] &= \lambda_0 + \lambda_1 b_{i1} + \lambda_2 b_{i2} + \ldots + \lambda_k b_{ik},\ i = 1, 2, \ldots, n. \end{aligned} \tag{7.55}$$

2 Die Lösungen bilden einen d-dimensionalen Unterraum, der senkrecht auf den Zeilenvektoren der Matrix $\mathbf{M}'$ steht. Die Zeilenvektoren bilden selber einen r-dimensionalen Unterraum, weil gemäß Annahme die Zeilenvektoren linear unabhängig voneinander sind.

3 Mittelwert und Erwartungswert werden hier als Synonyme behandelt.

Dabei bezeichnen $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_k$, freie Konstante, die in den Kursunterlagen als den risikolosen Zinssatz, R, bzw. die Überschuß-Ertragsraten der Faktor-i-Portfolios, $\mathcal{E}[\tilde{Z}_i] - R$; $i = 1, 2, \ldots, k$, identifiziert werden.

2. Die grafische Darstellung

Im ersten Fall, dargestellt in der Abbildung 1, werden drei Wertpapiere und ein Faktor betrachtet, wobei zur einfacheren Darstellung der Identitätsvektor vernachlässigt wird. In diesem Fall spannen die Gewichtsvektoren des Arbitrage-Portfolios eine Ebene auf, die senkrecht auf dem Vektor des einzigen Faktors steht. Der Mittelwerts-Vektor der Ertragsraten steht wiederum senkrecht auf dieser Ebene, d. h. er liegt auf der gleichen Geraden wie der Vektor des einzigen Faktors.

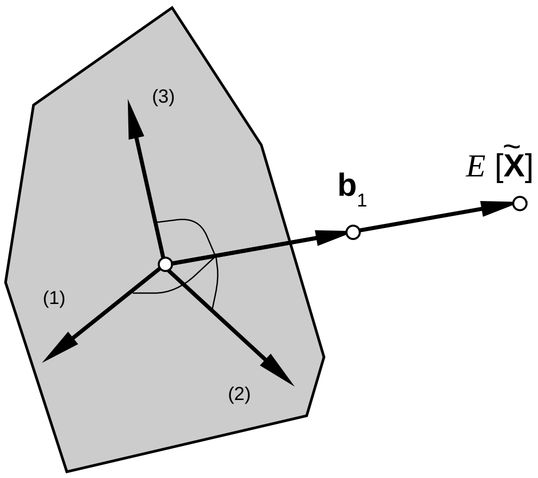

Abb. 1: Drei Wertpapiere und ein Faktor; ohne Identitätsvektor.

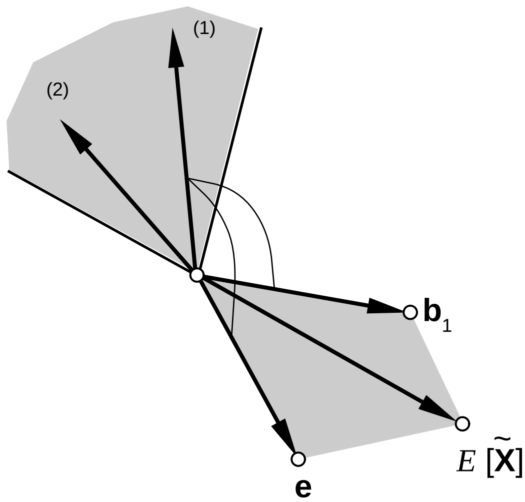

Abb. 2: Vier Wertpapiere und ein Faktor; mit Identitätsvektor.

Im zweiten Fall, schematisch dargestellt in der Abbildung 2, wird einerseits der Identitätsvektor und andererseits ein viertes Wertpapier hinzugenommen. Die Gewichtsvektoren des Arbitrage-Portfolios spannen im vierdimenionalen Raum eine Ebene auf, die senkrecht auf der Ebene steht, welche durch den Identitätsvektor und jenen des einzigen Faktors gebildet wird. Der Mittelwerts-Vektor der Wertpapier-Ertragsraten selber steht senkrecht auf der durch die Gewichts-Vektoren gebildeten Ebene und liegt deshalb in der Ebene, die durch den Identitätsvektor und jenen des einzigen Faktors gebildet wird. Deshalb kann der Mittelwerts-Vektor als eine lineare Kombination der letzteren beiden Vektoren geschrieben werden.

Literaturnachweis

ZURMÜHL, R. (1964): *Matrizen*, Heidelberg: Springer-Verlag.