

# ROLLS KRITIK AN DER EMPIRISCHEN ÜBERPRÜFBARKEIT DES KAPITAL-ANLAGE-PREIS-MODELLS

von

HANS-JÜRG BÜTTLER

In dieser Notiz wird die Kritik von ROLL (1977) an der empirischen Überprüfbarkeit des Kapital-Anlage-Preis-Modells (KAPM)<sup>1</sup> dargestellt. Aufgrund dieser Kritik ist der übliche Test des KAPMs mit Hilfe von einfachen Regressionsrechnungen *nicht* richtig. SHANKEN (1987) hat einen empirischen Test des KAPMs vorgeschlagen, der gleichzeitig das KAPM und eine bestimmte Korrelations-Hypothese prüft. SHANKEN kommt zum Schluß, daß das KAPM aus empirischer Sicht verworfen werden muß.

## 1. Die Annahmen

ROLL (1977) trifft drei Annahmen:

- A1. Die Kovarianzmatrix,  $\Sigma$ , der riskanten Anlagen ist nicht singulär.<sup>2</sup>
- A2. Zumindest ein riskantes Wertpapier hat eine erwartete Ertragsrate,  $E[\tilde{X}_i]$ , die sich von den anderen erwarteten Ertragsraten unterscheidet.
- A3. Das risikolose Wertpapier, falls vorhanden, hat eine konstante Ertragsrate,  $R$ .

Alle Annahmen und die folgenden Beziehungen gelten sowohl für die Grundgesamtheit als auch für die Stichproben der Untersuchungsperiode.

## 2. Die beiden wichtigsten Aussagen

Die beiden folgenden Aussagen beruhen auf dem Korollar 6 und der Gleichung (A.19) in ROLLs Artikel.

S1: *Die Kovarianzen oder Betas von einzelnen Wertpapieren mit irgend einem Portfolio sind eine exakte lineare Funktion der Mittelwerte der einzelnen Wertpapiere dann und nur dann, falls das Portfolio effizient ist.*

Der Beweis erfolgt mit Hilfe der Minimum-Varianz-Portfolios, die mit der Notation der Kursunterlagen lauten:<sup>3</sup>

$$\omega_{\min} = \Sigma^{-1} \mathbf{B}' (\mathbf{B} \Sigma^{-1} \mathbf{B}')^{-1} \mathbf{b} \equiv \Sigma^{-1} \mathbf{B}' \mathbf{A}^{-1} \mathbf{b}. \quad (1)$$

Die wichtigen Informationen zur Beweisführung liegen in der  $(2 \times 2)$ -Matrix  $\mathbf{A}$  verborgen.<sup>4</sup>

---

<sup>1</sup> Englisch *capital asset pricing model* (CAPM).

<sup>2</sup> Die Auszahlungsvektoren der riskanten Wertpapiere sind linear unabhängig voneinander.

<sup>3</sup> Vgl. Aufgabe 6.7.

<sup>4</sup> Vgl. Aufgabe 6.9.

S2: Das KAPM läßt sich direkt aus S1 herleiten, ohne daß explizite Annahmen über die Risikoscheu, homogene Erwartungen und das Marktportfolio getroffen werden müssen.

Satz 2 gilt deshalb, weil das KAPM eben eine lineare Beziehung ist. Im Satz 1 werden natürlich implizite Annahmen getroffen: Zum einen werden in der Mittelwert-Varianz-Analyse risikoscheue Investoren behandelt. Zum andern wird ein einziger Vektor der Portfolio-Gewichte,  $\omega_{min}$ , für alle Investoren unterstellt; daraus folgt die Annahme der homogenen Erwartungen. Schließlich folgt aus der Mittelwert-Varianz-Analyse und aus der Annahme homogener Erwartungen zusammen ein effizientes Marktportfolio.

Falls das gewählte Indexportfolio effizient ist, dann folgt gemäß S1 und S2 automatisch die exakte lineare Beziehung des KAPMs:

$$\begin{aligned} E[\tilde{X}_i] &= E[\tilde{Z}_{\beta_e}] + (E[\tilde{Z}_e] - E[\tilde{Z}_{\beta_e}])\beta(\tilde{X}_i, \tilde{Z}_e) \text{ oder} \\ E[\tilde{X}_i] &= R + (E[\tilde{Z}_M] - R)\beta(\tilde{X}_i, \tilde{Z}_M). \end{aligned} \quad (2)$$

Dabei bezeichnet  $\tilde{Z}_e$  das effiziente Indexportfolio und  $\tilde{Z}_{\beta_e}$  das zugehörige Minimum-Varianz-Null-Beta-Portfolio. Die zweite Zeile von Gl. (2) gilt, wenn das effiziente Indexportfolio gleich dem Marktportfolio ist. In diesem Fall ist die erwartete Ertragsrate des zum Marktportfolio gehörigen Minimum-Varianz-Null-Beta-Portfolios gleich dem (beobachteten) risikolosen Zinssatz.

### 3. Folgerungen

Wir unterstellen, das KAPM gelte für das „wahre“ Marktportfolio  $Z_M$ . Weil das „wahre“ Marktportfolio nicht oder nur schwer zu beobachten ist, wird in empirischen Tests ein Index-Portfolio,  $Z_I$ , verwendet, das in der Regel *nicht* mit dem „wahren“ Marktportfolio zusammenfällt. Zwei Fälle sind möglich. Im ersten Fall ist das Index-Portfolio nicht effizient und im zweiten Fall zwar effizient, jedoch vom „wahren“ Marktportfolio verschieden.

Der erste Fall wird in der Abbildung 1 dargestellt. Das Index-Portfolio,  $Z_I$ , liegt nicht in der Menge der Minimum-Varianz-Portfolios und ist deshalb ineffizient. In diesem Fall besteht gemäß Satz 1 keine lineare Beziehung zwischen  $E[\tilde{X}_i]$  und  $\beta(\tilde{X}_i, \tilde{Z}_I)$ , d. h. der empirische Test wird in der Regel das KAPM verwerfen.

Der zweite Fall wird in der Abbildung 2 dargestellt. Das Index-Portfolio,  $Z_I$ , sei zwar effizient, d. h. es liege in der Menge der Minimum-Varianz-Portfolios, sei jedoch verschieden vom „wahren Marktportfolio“. Aufgrund von Satz 2 gilt nun das KAPM so wie es in der ersten Zeile von Gl. (2) geschrieben ist, falls dort für das effiziente Portfolio,  $Z_e$ , und für das zugehörige Minimum-Varianz-Null-Beta-Portfolio,  $Z_{\beta_e}$ , das in der Abbildung 2 angegebene Index-Portfolio,  $Z_I$ , und das zugehörige Minimum-Varianz-Null-Beta-Portfolio,  $Z_{\beta_I}$ , eingesetzt wird. Weil aber die erwartete Ertragsrate des Minimum-Varianz-Null-Beta-Portfolios,  $E[\tilde{Z}_{\beta_I}]$ , vom beobachteten risikolosen Zinssatz abweicht, d. h.  $R \neq E[\tilde{Z}_{\beta_I}]$ , wird der empirische Test das KAPM wiederum verwerfen.

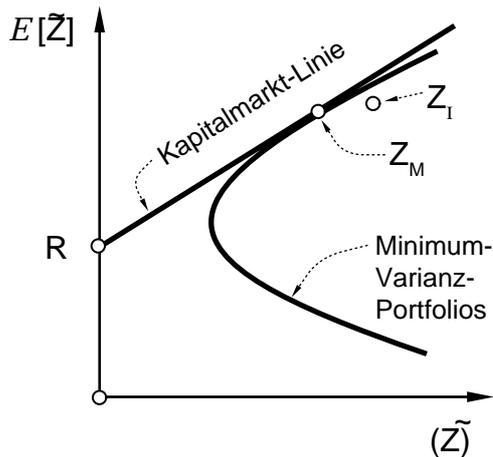


Abb. 1: Das beobachtete Index-Portfolio ist ineffizient.

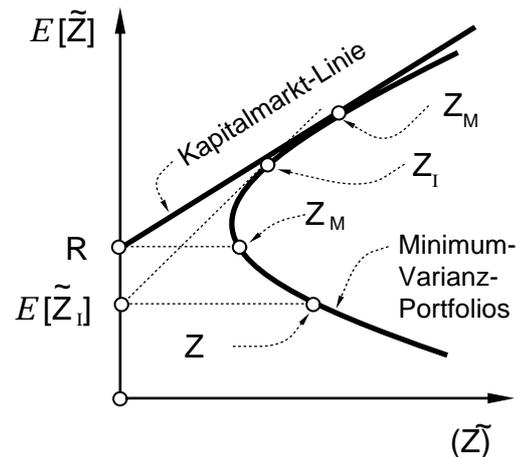


Abb. 2: Das Index-Portfolio ist effizient, aber vom Marktportfolio verschieden.

SHANKEN hat vorgeschlagen, gleichzeitig zu prüfen, ob einerseits das KAPM zutrifft und andererseits das verwendete Index-Portfolio hinreichend hoch mit dem Marktportfolio korreliert ist. Für den Korrelationskoeffizienten aus Index-Portfolio und Marktportfolio,  $r(\tilde{Z}_I, \tilde{Z}_M)$ , wird gefordert, daß er einen bestimmten Wert,  $\bar{r}$ , übertrifft. Für die geforderte Schranke von  $\bar{r} = 0,7$  wurde der gemeinsame Test, d. h. das KAPM verworfen.

### Literaturnachweis

ROLL, R. (1977): „A Critique of the Asset Pricing Theory’s Tests“, *Journal of Financial Economics*, 4: 129 – 176.

SHANKEN, J. (1987): „Multivariate Proxies and Asset Pricing Relations: Living with the Roll Critique“, *Journal of Financial Economics*, 18: 91 – 110.