# DIE DIFFERENTIALGLEICHUNG ZUR BESTIMMUNG DES PREISES VON WÄHRUNGSOPTIONEN

von

HANS-JÜRG BÜTTLER

In der vorliegenden Notiz werden zuerst Kennziffern des Wechselkurses, die für die lognormale Verteilung und die Optionstheorie eine Rolle spielen, dargelegt und danach die Differentialgleichung der Kaufsoption auf Fremdwährung nach der ursprünglichen Idee von BLACK UND SCHOLES hergeleitet.

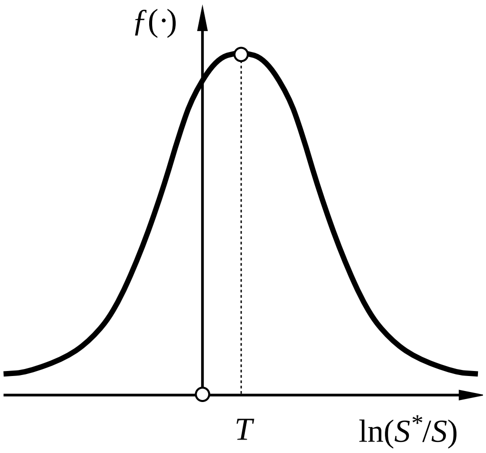


Abbildung 1: Die kontinuierliche Veränderungsrate ist normal verteilt.

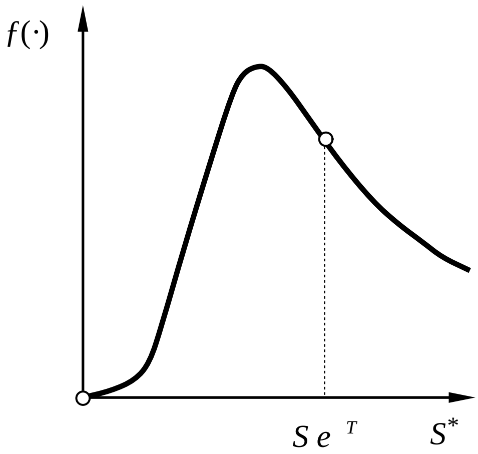


Abbildung 2: Der Wechselkurs ist lognormal verteilt.

## 1. Kennziffern des Wechselkurses

Die kontinuierliche Veränderungsrate des Wechselkurses lautet $\ln(S_t/S_{t-1})$, wenn $S$ den Wechselkurs, d. h. den Preis einer Fremdwährungseinheit in inländischer Währung bezeichnet. Für kleine Werte ist die kontinuierliche ungefähr gleich der diskreten Veränderungsrate, was sofort aus der MACLAURIN-Reihe des Logarithmus, die in der zweiten Zeile von Gl. (1) dargestellt ist, folgt:

$$\begin{aligned}\ln\frac{S_t}{S_{t-1}} &= \ln\left(1+\frac{S_t-S_{t-1}}{S_{t-1}}\right)\\ &= \frac{S_t-S_{t-1}}{S_{t-1}} - \frac{1}{2}\left(\frac{S_t-S_{t-1}}{S_{t-1}}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{S_t-S_{t-1}}{S_{t-1}}\right)^3 - \frac{1}{4}\left(\frac{S_t-S_{t-1}}{S_{t-1}}\right)^4 + \ldots \\ &\approx \frac{S_t-S_{t-1}}{S_{t-1}}\,.\end{aligned} \tag{1}$$

Die statistischen Annahmen für die kontinuierliche Veränderungsrate lauten:

1. Zeitlich disjunkte Veränderungsraten sind unabhängige Zufallsvariablen.
2. Die kontinuierliche Veränderungsrate ist normal verteilt mit dem konstanten augenblicklichen Mittelwert $\mu$ und der konstanten augenblicklichen Varianz $\sigma^2$. Über ein Zeitintervall $dt$ beträgt der Mittelwert $\mu\, dt$ und die Varianz $\sigma^2\, dt$.

Die gesamte Veränderungsrate des Wechselkurses über eine bestimmte Zeitperiode $T$ ist deshalb die Summe der einzelnen unabhängigen Veränderungsraten. Bezeichnet man mit $S$ den Wechselkurs am Anfang und mit $S^*$ den Wechselkurs am Ende der Periode, deren Länge $T$ beträgt, dann ist die gesamte kontinuierliche Veränderungsrate, $\ln(S^*/S)$, normal verteilt mit dem Mittelwert $\mu\, T$ und der Varianz $\sigma^2\, T$:

$$\ln \frac{S^*}{S} \sim N(\mu\, T,\, \sigma^2 T). \tag{2}$$

Die Dichtefunktion der Normalverteilung, $N$, wird in Abbildung 1 dargestellt. Der Logarithmus des Wechselkurses am Ende der Periode, $\ln S^*$, ist ebenfalls normal verteilt mit dem Mittelwert $\mu\, T + \ln S$ und der Varianz $\sigma^2\, T$. Der Wechselkurs am Ende der Periode, $S^*$, ist dann lognormal verteilt mit der folgenden Dichtefunktion $f(\cdot)$:

$$f(S^*) = \frac{1}{S^* \sqrt{2\pi\sigma^2 T}}\, e^{-\frac{1}{2}\frac{[\ln S^* - \mu\, T - \ln S]^2}{\sigma^2 T}}. \tag{3}$$

Die lognormale Verteilung wird in Abbildung 2 dargestellt. Aus der Beziehung zwischen der normalen und lognormalen Verteilung folgt mit der Bezeichnung $E$ für den Erwartungsoperator:

$$\ln E\left[\frac{S^*}{S}\right] \equiv \rho T = \mu\, T + \frac{1}{2}\,\sigma^2 T. \tag{4}$$

Für einen gegebenen Anfangs-Wechselkurs, $S$, ist der Erwartungswert (Mittelwert) des Wechselkurses am Ende der Periode: $E[S^*] = S \exp(\rho\, T)$. Dieser Wert wird in Abbildung 2 angegeben. Die Kennziffer $\rho\, T$ ist die erwartete durchschnittliche Veränderungsrate des Wechselkurses über die betrachtete Zeitperiode. Sie könnte auch als „Trendrate" bezeichnet werden. Dieser Trend wird durch die gestrichelte Exponentiallinie in der Abbildung 3 dargestellt.

In der Regel sind drei Kennziffern für die Beobachtung des Wechselkurses von Interesse: Der arithmetische Mittelwert, die Veränderungsrate, $\rho\, T$, beziehungsweise der Mittelwert der kontinuierlichen (täglichen) Veränderungsrate, $\mu\, T$, und die Volatilität. Wenn $t = 1, 2, \ldots, n$, die Tage der Stichprobe und $T$ die Anzahl Arbeitstage eines Jahres (normalerweise 260) bezeichnen, dann berechnet sich der Mittelwert während der Laufzeit der Option als das arithmetische Mittel der Tageskurse:

$$\text{Mittelwert} \equiv E[S_t],\ t = 1, 2, \dots, n. \tag{5}$$

Die auf das Jahr hochgerechnete Veränderungsrate, $\rho\, T$, berechnet sich nach Gl. (4) aus dem Erwartungswert der täglichen Veränderungsraten aufs Jahr hochgerechnet, $\mu\, T$, und der Varianz der täglichen Veränderungsraten aufs Jahr hochgerechnet, $\sigma^2\, T$:

$$\begin{aligned} \mu\, T &\equiv E\left[\ln \frac{S_t}{S_{t-1}}\right] T,\ t = 2, 3, \dots, n. \\ \sigma^2 T &\equiv \operatorname{var}\left[\ln \frac{S_t}{S_{t-1}}\right] T,\ t = 2, 3, \dots, n. \end{aligned} \tag{6}$$

Schließlich ist die Volatilität in der Optionstheorie als die Standardabweichung der kontinuierlichen täglichen Veränderungsraten definiert. Aufs Jahr hochgerechnet:

$$\text{Volatilität} \equiv \sigma \sqrt{T}. \tag{7}$$

Dieses Konzept läßt sich auch auf Aktien übertragen, wenn man $S$ als den Aktienkurs und nicht als den Wechselkurs auffaßt. Die Bewertung der Aktienoption lautet zwar etwas anders als im Falle der Währungsoption, das Prinzip bleibt das gleiche.

## 2. Die Differentialgleichung der Währungsoption

Der Halter (Käufer) einer europäischen Kaufsoption auf Fremdwährung hat das Recht, jedoch nicht die Pflicht, am Verfallstag eine Einheit ausländischer Währung zu einem bestimmten Wechselkurs, dem sogenannten Ausübungspreis[1], zu kaufen.[2] Der Wechselkurs ist hier definiert als der Preis einer Fremdwährungs-Einheit in inländischer Währung. Die an den Optionsbörsen gehandelten Verträge beziehen sich jeweils auf den amerikanischen Dollar („Inlandswährung") und belaufen sich auf eine bestimmte Summe (z. B. 125'000 SFr am Chicago Board of Options Exchange).[3] Die Laufzeit der Optionen beträgt im Maximum neun Monate und es gibt in der Regel vier Vefallstage im Jahr (z. B. dritter Mittwoch im März, Juni, September und Dezember). Der Halter wird die Kaufsoption am Verfallstag dann ausüben, wenn der Kassakurs am Verfallstag größer als der Ausübungspreis ist. In diesem Fall erzielt er einen Gewinn, denn er kann z. B. ein britisches Pfund zum Ausübungspreis kaufen und am selben Tag zum höheren Kassakurs verkaufen. Die Option wird er hingegen verfallen lassen, wenn der Kassakurs am Verfallstag kleiner oder gleich dem Ausübungspreis ist. In diesem Fall würde der Halter einen Verlust erzielen, wenn er die Option ausüben würde. Der Schreiber (Verkäu-

---

1 Auch als Bezugspreis oder Basispreis bezeichnet. Englisch *exercise price, strike price* oder *striking price*.
2 Im Falle der amerikanischen Option kann diese *jederzeit* ausgeübt werden.
3 Eine Option in Schweizer Franken auf z. B. D-Mark muß über den Dollar konstruiert werden.

fer) einer Kaufsoption geht die Verpflichtung ein, am Verfallstag ein Pfund zu liefern, falls die Option ausgeübt wird. Er erhält dann für jedes gelieferte Pfund den Ausübungspreis in Dollars.

Für das Optionsrecht muß der Halter dem Schreiber bei Abschluß des Optionsvertrages einen Preis in inländischer Währung, den Kaufsoptions-Preis, entrichten. Der gegenwärtige Preis einer europäischen Kaufsoption wird durch sechs Faktoren bestimmt: Den gegenwärtigen Wechselkurs, den Ausübungspreis, die Restlaufzeit der Option, den in- und ausländischen Zinssatz sowie die Volatilität der erwarteten Wechselkurs-Schwankungen während der Restlaufzeit der Option. Die ersten fünf Größen sind bei Vertragsabschluß bekannt, während die Volatilität unbekannt ist. Man behilft sich damit, indem anstelle der erwarteten die vergangene (historische) Volatilität zugrunde gelegt wird.

Ein verbessertes Verfahren besteht darin, die sogenannte *implizite Volatilität* zu berechnen. Beobachtet man zum gegenwärtigen Zeitpunkt den Preis einer identischen Kaufsoption, so kann mit Hilfe der Optionspreis-Formel die Volatilität berechnet werden, vorausgesetzt die theoretische Formel entspricht tatsächlich der Preisfestlegung der Marktteilnehmer. Empirische Untersuchungen zeigen jedoch, daß die Optionspreis-Formel die tatsächlich beobachteten Optionspreise entweder über- oder unterschätzt, je nachdem ob die Option tief im oder aus dem Geld ist.[4] Sieht man von diesen Schwierigkeiten einmal ab, dann kann die implizite Volatilität als Maß für die Unsicherheits-Einschätzung des Devisenmarktes über den zukünftigen Wechselkursverlauf für die Restlaufzeit der Option angesehen werden. Eine (markante) Veränderung der impliziten Volatilität ist letzlich das Ergebnis einer Neubeurteilung der gegenwärtigen und unmittelbar zukünftig erwarteten Geld-, Währungs- und Finanzpolitik durch den Devisenmarkt. In diesem Sinne könnte die Wirkung von geld- oder währungspolitischen Maßnahmen der Zentralbanken mit geringer zeitlicher Verzögerung beobachtet werden.

Um das Konzept der Volatilität verstehen zu können, müssen die Annahmen, die der Optionsbewertung zugrunde liegen, beschrieben werden. Wie oben dargestellt, hängt der gegenwärtige Preis der Kaufsoption, $C$, nur von einer Zufallsvariablen, nämlich dem Wechselkurs, $S$, ab. Die übrigen Variablen sind (oder seien) bekannt im Zeitablauf. Die statistischen Annahmen in bezug auf den Wechselkurs sind bereits im ersten Abschnitt erwähnt worden. Für kontinuierliche Veränderungen läßt sich der Wechselkurs als geometrische BROWNsche Bewegung beschreiben:

$$\frac{dS}{S} = \mu\, dt + \sigma dz. \tag{8}$$

Die kontinuierliche Veränderungsrate, $dS/S$, unterliegt einer konstanten augenblicklichen Trendrate, $\mu$, und einer Zufallsänderung, $dz$, multipliziert mit der konstanten augenblicklichen Standardabweichung, $\sigma$. Die Zufallsänderung —als GAUSS-WIENER-Prozess bezeichnet— ist

[4] Eine Kaufsoption ist tief im [aus dem] Geld, wenn der gegenwärtige Wechselkurs weit größer [kleiner] als der Ausübungspreis ist.

normal verteilt mit Mittelwert null und Varianz $dt$, d. h. $E[dz] = 0$ und $\mathrm{var}(dz) = dt$. Die geometrische BROWNsche Bewegung wird in Abbildung 4 dargestellt.

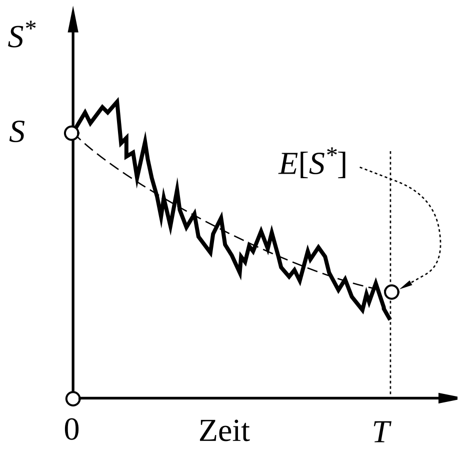


Abbildung 3: Wechselkursverlauf.

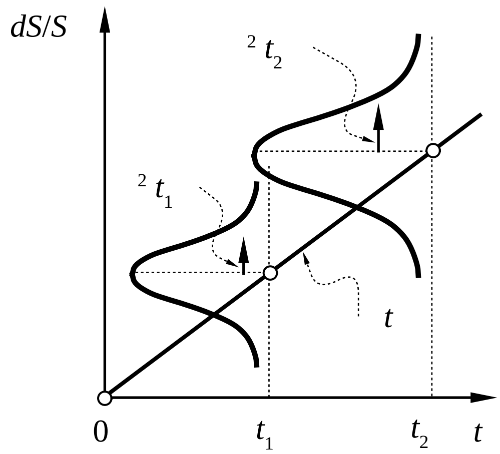


Abbildung 4: Geometrische BROWNsche Bewegung des Wechselkurses.

Zur Bestimmung des Preises der Kaufsoption, $C$, wird zu Beginn der Zeitperiode, d. h. wenn die Option gekauft wird, ein Portfolio, dessen Wert in inländischer Währung mit $V$ bezeichnet wird, gebildet, das aus einer ausländischen Null-Coupon-Obligation und $Q$ Einheiten der Kaufsoption besteht. Weil die Option durch eine andere Position „gedeckt" wird, spricht man von einem Gegendeckungs-Portfolio[5]. Es bleibt vorerst offen, ob die Kaufsoption gehalten oder geschrieben werden soll. Die ausländische Obligation bezahle am Verfallstag der Option eine Geldeinheit in fremder Währung, so daß der gegenwärtige Preis, $B_f$, in ausländischer Währung $B_f = \exp(-\, r_f\, T)$ lautet, wobei $r_f$ den ausländischen risikolosen Zinssatz bedeutet. Rechnet man den Wert der ausländischen Obligation zum laufenden Wechselkurs, $S$, um, dann lautet der Wert des Portfolios in inländischer Währung:

$$V = B_f S + QC(S, t, \ldots). \tag{9}$$

Mit Hilfe von ITÔs Lemma läßt sich die Veränderung des Wertes des Portfolios wie folgt schreiben:

$$dV = r_f B_f S\, dt + B_f dS + Q\left[\frac{\partial C}{\partial t}\, dt + \frac{\partial C}{\partial S}\, dS + \frac{1}{2}\,\frac{\partial^2 C}{\partial S^2}\,\sigma^2 S^2 dt\right]. \tag{10}$$

Wählt man in *jedem* Zeitpunkt die Anzahl Kaufsoptionen, $Q$, gleich dem negativen Wert der ausländischen Obligation dividiert durch den Grenzpreis der Kaufsoption in bezug auf Wech-

5 Englisch *hedge portfolio*.

selkurs, $-B_f/(\partial C/\partial S)$, dann kürzen sich in Gl. (10) das zweite und vierte Glied.[6] Im Gegendeckungs-Portfolio werden die Kaufsoptionen also geschrieben. Die Wertänderung des Gegendeckungs-Portfolios wird dann nur noch eine Funktion der Zeit. Mit anderen Worten das Gegendeckungs-Portfolio hängt nicht mehr von Zufallsbewegungungen des zugrundeliegenden Vermögenswertes (des Wechselkurses) ab und ist deshalb, abgesehen vom Schuldnerrisiko der Obligation, *risikolos*. Dieses grundlegende Konzept wurde zuerst von BLACK UND SCHOLES (1973) entdeckt. Weil jedes risikolose Wertpapier den gleichen Ertrag im Gleichgewicht abwerfen muß, ist die Wertänderung des Gegendeckungs-Portfolios von Gl. (10) gleich dem Ertrag einer inländischen risikolosen Null-Coupon-Obligation mit dem Zinnsatz $r_d$:

$$dV = r_d V dt. \tag{11}$$

Setzt man den Wert des Portfolios aus Gl. (9) sowie dessen Veränderung aus Gl. (10) in Gl. (11) ein und berücksichtigt die Delta-Deckung, $Q = -B_f/(\partial C/\partial S)$, dann erhält man die partielle Differentialgleichung zur Bestimmung des Kaufsoptions-Preises:

$$\frac{\partial C}{\partial t} = (r_f - r_d) S \frac{\partial C}{\partial S} + r_d C - \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} . \tag{12}$$

Gl. (12) entspricht der Wärmeleit-Gleichung aus der Physik, deren Lösung unter Berücksichtigung der Randbedingungen für die europäische Option lautet:

$$\begin{aligned} C &= e^{-r_f T} S\, N(d_1) - e^{-r_d T} X\, N(d_2), \\ \text{mit } d_1 &= \frac{ln(S/X) + \{r_d - r_f + \sigma^2/2\}\, T}{\sigma\sqrt{T}} \text{ und} \\ d_2 &= d_1 - \sigma\sqrt{T} \ . \end{aligned} \tag{13}$$

Dabei bezeichnen $N$ wie in Gl. (2) die Normalverteilung und $X$ den Ausübungspreis der Kaufsoption. Die vorliegende Herleitung stützt sich auf die ursprüngliche Idee von BLACK UND SCHOLES. Eine andere Herleitung findet sich in GRABBE (1983) sowie GARMAN UND KOHLHAGEN (1983), die als erste und unabhängig voneinander den Preis einer europäischen Währungsoption bestimmt haben. GRABBE unterstellt zudem stochastische Zinssätze, was jedoch die Formel für die europäische Währungsoption nur in einem Punkt ändert: Die Volatiliät setzt sich aus jener des Wechselkurses und der beiden Zinssätze zusammen. Die Bewertung der amerikanischen Währungsoption findet sich in BÜTTLER (1989) und eine Beschreibung der verschiedenen Arten von Währungsoptionen in GRABBE (1986).

6 Diese Deckung wird als Delta-Deckung (*delta hedge*) bezeichnet.

## Literaturnachweis

BLACK, F. AND M. SCHOLES (1973): „The Pricing of Options and Corporate Liabilities", *Journal of Political Economy*, 81: 637 – 659.

BÜTTLER, H.-J. (1989): „An Expository Note on the Valuation of Foreign Exchange Options", *Journal of International Money and Finance*, 8: 295 – 304.

GARMAN, MARK B. AND STEVEN W. KOHLHAGEN (1983): „Foreign Currency Option Values", *Journal of International Money and Finance*, 2: 231 – 237.

GRABBE, J. ORLIN (1983): „The Pricing of Call and Put Options on Foreign Exchange", *Journal of International Money and Finance*, 2: 239 – 253.

GRABBE, J. ORLIN (1986): *International Financial Markets*, New York: Elsevier Science Publishing Co.