Die Option in kontinuierlicher Zeit

von
HANS-JüRG BüTTLER
Schweizerische Nationalbank

Dieser Abschnitt behandelt die Option in kontinuierlicher Zeit und leitet die europäische Optionspreisformel von BLACK UND SCHOLES aus der entsprechenden Differentialgleichung her. Es wird unterstellt, der Aktienkurs werde durch eine geometrische BROWNsche Bewegung beschrieben. In einem ersten Schritt wird aus einer bestimmten Anzahl an Kaufsoptionen und der zugrundeliegenden Aktie ein Portfolio gebildet, das durch geeignete Wahl der Anteile an Optionen risikolos wird, falls das Deckungsverhältnis, das Δ-Verhältnis, in *jedem* Zeitpunkt angepaßt wird.[1] Die augenblickliche Rendite des risikolos gewordenen Portfolios muß deshalb in jedem Zeitpunkt dem riskolosen Zinssatz, der hier als exogen gegeben angesehen wird, entsprechen, ansonsten könnten durch Arbitrage Gewinne ohne jegliches Risiko erzielt werden. Als Ergebnis dieser Bewertungsmethode entsteht eine deterministische, partielle Differentialgleichung des Optionswertes in Funktion der Zeit und des Aktienkurses. Im zweiten Schritt wird diese partielle Differentialgleichung gelöst.

1. Die partielle Differentialgleichung von BLACK UND SCHOLES

Im Folgenden wird mit x der Aktienkurs bezeichnet, der zwischen null und unendlich schwanken kann. Der augenblickliche Erwartungswert der kontinuierlichen Ertragsrate der Aktie werde mit μ und die augenblickliche Standardabweichung der erwähnten Ertragsrate mit σ bezeichnet. Beide seien konstant. Mit dem WIENER-Prozeß, dz, läßt sich die geometrische BROWNsche Bewegung des Aktienkurses folgendermaßen schreiben:

$$\frac{dx}{x} = \mu\, dt + \sigma dz. \tag{1}$$

Aus den Arbitrage-Beziehungen folgt, daß der Preis einer Option, u, eine Funktion des Kurses der zugrundeliegenden Aktie, x, der Zeit, t, und verschiedener Konstanten sein muß, d. h. $u(t, x)$. Es könnte sich sowohl um eine Kaufsoption als auch um eine Verkaufsoption handeln. Die beiden Optionen unterscheiden sich lediglich durch die Auszahlungsbedingungen am Verfallstag. Wir differenzieren die Preisfunktion mit Hilfe des Satzes von ITO und erhalten unter Verwendung von Gl. (1):

---

1 Die mit der laufenden Anpassung verbundenen Kosten würden in Wirklichkeit unendlich groß werden. In diesem Sinne spricht man manchmal von einer redundanten Bewertung, was aber den Kern der Bewertungsmethode nicht beeinträchtigt.

$$du = \frac{\partial u}{\partial t}\,dt + \frac{\partial u}{\partial x}\,dx + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,\sigma^2 x^2\,dt. \tag{2}$$

Der Wert für dx, der durch Gl. (1) gegeben ist, wurde in der Gleichung (2) mit Absicht nicht eingesetzt, weil Gleichung (2) in der obigen Form benötigt wird. Wir bilden nun ein Portfolio, dessen Wert mit V bezeichnet wird, das aus einer Aktie und q Optionen besteht. Der Wert dieses Portfolios schreibt sich deshalb als

$$V = 1x + qu. \tag{3}$$

Erneute Anwendung des Satzes von ITO auf Gleichung (3) ergibt die Veränderung des Portfoliowertes, falls die Anteile von Aktie und Optionen konstant gehalten werden:

$$dV = dx + q\,du. \tag{4}$$

Setzt man du aus Gl. (2) in Gl. (4) ein, so erhält man schließlich die Veränderung des Portfoliowertes während einer „kleinen" Zeitperiode als

$$dV = dx + q\left[\frac{\partial u}{\partial t}\,dt + \frac{\partial u}{\partial x}\,dx + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,\sigma^2 x^2 dt\right]. \tag{5}$$

In der eckigen Klammer ist nur der zweite Ausdruck von der Aktienkursbewegung dx abhängig. Die übrigen beiden Ausdrücke hängen nur von der Zeit ab, weil die partiellen Ableitungen zu Beginn der „kleinen" Zeitperiode ermittelt werden müssen und deshalb konstant sind. Wählt man nun die negative Anzahl der Optionen gleich dem umgekehrten Verhältnis der partiellen Ableitung des Optionspreises nach dem Aktienkurs, d. h. $q = -1/(\partial u/\partial x)$, dann kürzen sich die beiden Ausdrücke mit der Aktienkursbewegung dx in Gl. (5). Die Veränderung des Portfoliowertes hängt dann nur noch von der Zeit ab und ist deshalb von der Aktienkursbewegung abgeschirmt bzw. „gedeckt". In diesem Sinne handelt es sich um ein *risikoloses* Gegendeckungs-Portfolio[2]. Es muß deshalb den gleichen Ertrag wie ein risikoloses Wertpapier mit dem Zinssatz r abwerfen, d. h.

$$dV = rV\,dt. \tag{6}$$

Setzt man den Ausdruck für dV aus Gl. (5) und jenen für V aus Gl. (3) zusammen mit der erwähnten Anzahl Optionen q in Gl. (6) ein, so erhält man schließlich die partielle Differentialgleichung des Optionspreises von Gl. (7).

2 Englisch *hedge portfolio*.

$$\frac{\partial u(t,\,x)}{\partial t} = -\frac{1}{2}\,\sigma^2 x^2\,\frac{\partial^2 u(t,\,x)}{\partial x^2} - rx\,\frac{\partial u(t,\,x)}{\partial x} + ru(t,\,x),\ (0 < x < \infty;\ -\infty < t < \mathbb{t}). \tag{7}$$

Dabei wird der Verfallszeitpunkt der Option mit $\mathbb{t}$ bezeichnet. Gleichung (7) gilt sowohl für Kaufs- als auch für Verkaufsoptionen, da in der Herleitung keine Eigenschaft dieser beiden Optionen verwendet wurde.

Im Folgenden soll nur die *Kaufsoption* betrachtet werden. Am Verfallstag ist der Wert der Kaufsoption entweder null oder gleich der Differenz zwischen Aktienkurs, x, und Ausübungspreis, k, d. h. $u(\mathbb{t}, x) = \max\,[0, x - k]$ für alle Aktienkurse. Aus den Arbitrage-Beziehungen wissen wir zudem, daß die Kaufsoption wertlos ist, sobald der Aktienkurs null wird. Weiterhin kann gezeigt werden, daß die Veränderung des Kaufsoptionspreises gleich der Veränderung des Aktienkurses ist, falls letzterer im Verhältnis zum Ausübungspreis sehr groß wird. Diese drei Bedingungen —eine Endbedingung und zwei Randbedingungen— werden in Gl. (8) zusammengefaßt.

$$\begin{array}{ll} \text{(Endbedingung)} & u(\mathbb{t},\,x) = \max\left[0,\,x-k\right], \\ \text{(Erste Randbedingung)} & u(t,\,0) = 0, \\ \text{(Zweite Randbedingung)} & 1 = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\partial u(t,\,x)}{\partial x}\,. \end{array} \tag{8}$$

Während die beiden Randbedingungen für die *numerische* Auswertung der Differentialgleichung (7) notwendig sind, gehen sie nicht in die *analytische* Lösung der Optionspreisformel ein. Um verschiedene Fälle zu unterscheiden, wird hingegen die erste Randbedingung verwendet und zudem gefordert, daß der Kaufsoptionspreis für eine unendlich lange Restlaufzeit beschränkt bleibt. Es wird sich zeigen, daß die analytische Lösung die beiden Randbedingungen von Gl. (8) automatisch erfüllen wird.

2. Die Lösung der partiellen Differentialgleichung

Gleichung (7) ist eine partielle Differentialgleichung vom *parabolischen* Typ. Damit sie mit bekannten Verfahren gelöst werden kann, soll diese zuerst durch eine Variablentransformation auf die einfache Form der physikalischen *Wärmeleitgleichung* $\partial\phi/\partial\tau = \partial^2\phi/\partial\xi^2$ gebracht werden. Wir bezeichnen die Variable τ als Zeitvariable und die Variable ξ als Ortsvariable.

Variablentransformation

Da die partielle Differentialgleichung (7) vier Glieder hat, können wir maximal drei unbekannte Funktionen für die Variablentransformation ansetzen. Wir unterstellen, die Ortsvariable sei sowohl von einer Ortsfunktion als auch von einer Zeitfunktion abhängig, und der Optionspreis werde zudem durch eine Zeitfunktion transformiert, d. h. wir schreiben:

$$\begin{aligned} \tau &= g(t), \\ \xi &= f(x) + g(t), \\ u(t, x) &= h(t)\,\phi(\tau, \xi). \end{aligned} \tag{9}$$

Die beiden unbekannten Funktionen g und h seien nur von der Zeit abhängig, während die unbekannte Funktion f nur vom Aktienkurs („Ortsvariable“) abhänge. Mit der Transformation (9) lauten die partiellen Ableitungen des Optionspreises:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= h'(t)\,\phi(\tau, \xi) + h(t)\,g'(t)\left[\frac{\partial \phi(\tau, \xi)}{\partial \tau} + \frac{\partial \phi(\tau, \xi)}{\partial \xi}\right], \\ \frac{\partial u}{\partial x} &= h(t)\,f'(x)\,\frac{\partial \phi(\tau, \xi)}{\partial \xi}, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= h(t)\left[f''(x)\,\frac{\partial \phi(\tau, \xi)}{\partial \xi} + \left[f'(x)\right]^2 \frac{\partial^2 \phi(\tau, \xi)}{\partial \xi^2}\right]. \end{aligned} \tag{10}$$

Setzt man die Ausdrücke von Gl. (10) in Gl. (7) ein und faßt die entsprechenden Glieder zusammen, dann erhält man folgende Differentialgleichung für den transformierten Kaufsoptionspreis ϕ.

$$\begin{aligned} h(t)\,g'(t)\,\frac{\partial \phi(\tau, \xi)}{\partial \tau} &= \left[rh(t) - h'(t)\right]\,\phi(\tau, \xi) - \frac{1}{2}\,\sigma^2 x^2 h(t)\left[f'(x)\right]^2 \frac{\partial^2 \phi(\tau, \xi)}{\partial \xi^2} \\ &\quad - h(t)\left[g'(t) + rx\,f'(x) + \frac{1}{2}\,\sigma^2 x^2 f''(x)\right]\frac{\partial \phi(\tau, \xi)}{\partial \xi}. \end{aligned} \tag{11}$$

Damit auf der linken Seite des Gleichheitszeichens ein Koeffizient von eins entsteht, wird Gl. (11) durch $h(t)\,g'(t)$ dividiert. Auf der rechten Seite sollen die Koeffizienten von ϕ und $\partial\phi/\partial\xi$ verschwinden, während jener von $\partial^2\phi/\partial\xi^2$ gleich eins gesetzt wird. Wir erhalten deshalb die folgenden drei Bedingungen für die drei unbekannten Funktionen g, h und f:

$$0 = \frac{h(t)\left[g'(t) + rx\,f'(x) + \frac{1}{2}\,\sigma^2 x^2 f''(x)\right]}{h(t)\,g'(t)}, \tag{12a}$$

$$1 = -\frac{\frac{1}{2}\,\sigma^2 x^2\,h(t)\left[f'(x)\right]^2}{h(t)\,g'(t)}, \tag{12b}$$

$$0 = \frac{rh(t) - h'(t)}{h(t)\,g'(t)}. \tag{12c}$$

Wir beginnen mit der Lösung der einfachsten Differentialgleichung, nämlich jener für h von Gl. (12c). Diese Gleichung reduziert sich auf die einfache, separierbare Differentialgleichung $r\,h(t) - h'(t) = 0$, dessen Lösung $h(t) = C \exp(r\,t)$ lautet. Dabei ist C eine beliebige Konstante und „exp“ bedeutet die Exponentialfunktion.[3] Da wir mit der Zeitvariablen τ die Verfallsfrist der Option erfassen wollen, setzen wir für die Integrationskonstante $C = \exp(-\, r\, \mathbb{t})$, wobei $\mathbb{t}$ das Verfallsdatum der Option bezeichnet. Demnach lautet die Lösung für die unbekannte Funktion h:

$$h(t) = e^{r(t - \mathbb{t})}. \tag{13c}$$

Im nächsten Schritt wird Gl. (12a) für die Funktion f gelöst, indem man den Ausdruck für g' aus Gl. (12b) einsetzt. Gleichung (12a) läßt sich dann als gewöhnliche Differentialgleichung für die Funktion f folgendermaßen schreiben:

$$\frac{1}{2}\,\sigma^2 x^2 f''(x) - \frac{1}{2}\,\sigma^2 x^2 \left[f'(x)\right]^2 + r x f'(x) = 0. \tag{i}$$

Um diese Differentialgleichung lösen zu können, soll sie mit der Substitution $y(x) = f'(x)$ weiter reduziert werden. Wir erhalten die folgende Differentialgleichung erster Ordnung für y, nachdem man mit x gekürzt hat:

$$\frac{1}{2}\,\sigma^2 x y'(x) - \frac{1}{2}\,\sigma^2 x y(x)^2 + r y(x) = 0. \tag{ii}$$

Gleichung (ii) ist eine BERNOULLIsche Differentialgleichung, die man im vorliegenden Fall durch die Substitution $y(x) = 1/z(x)$ lösen kann. Setzt man $y(x) = 1/z(x)$ und $y'(x) = -\, z'(x) / z(x)^2$ in Gl. (ii) ein, dann erhält man nach Multiplikation mit $z(x)^2$ folgende inhomogene Differentialgleichung für z:

$$z'(x) = \frac{2\,r}{\sigma^2 x}\, z(x) - 1 \equiv p(x)\, z(x) + q(x). \tag{iii}$$

Die Lösung der homogenen Differentialgleichung lautet $z_h(x) = C \exp(P(x))$, wobei $P(x)$ das unbestimmte Integral von $p(x)$ bedeutet. Somit erhalten wir die homogene Lösung

$$P(x) \equiv \int p(x)\, dx = \frac{r}{\sigma^2/2} \int \frac{1}{x}\, dx = \frac{2r}{\sigma^2} \ln(x), \tag{iv}$$

$$z_h(x) = C \exp\left(\frac{2r}{\sigma^2} \ln(x)\right) = C\, x^{2r/\sigma^2}. \tag{v}$$

Eine partikuläre Lösung der inhomogenen Differentialgleichung (iii) erhält man zu $z_0(x) = \gamma(x) \exp(P(x))$, wobei die Funktion $\gamma(x)$ durch $\gamma'(x) = q(x) \exp(-\, P(x))$ gegeben ist. Wir erhalten zunächst für $\gamma(x)$:

---

3 Im Folgenden werden Integrationskonstanten immer mit C bezeichnet.

$$\gamma'(x) \equiv q(x)\, e^{-P(x)} = -\, x^{-2r/\sigma^2} \Rightarrow \gamma(x) = \frac{\sigma^2}{2r - \sigma^2}\, x^{-[2r/\sigma^2] + 1} . \qquad \text{(vi)}$$

Setzt man die Funktionen $\gamma(x)$ aus Gl. (vi) und $P(x)$ aus Gl. (iv) in die partikuläre Lösung ein, so erhält man diese zu:

$$z_0(x) = \gamma(x)\, e^{P(x)} = \frac{\sigma^2}{2}\, \frac{x}{(r - \sigma^2/2)} . \qquad \text{(vii)}$$

Mit der homogenen Lösung von Gl. (v) und der partikulären Lösung von Gl. (vii) lautet die gesamte Lösung für die Differentialgleichung (iii) folgendermaßen:

$$z(x) = z_h(x) + z_0(x) = C\, x^{2r/\sigma^2} + \frac{\sigma^2}{2}\, \frac{x}{(r - \sigma^2/2)} . \qquad \text{(viii)}$$

Wir konzentrieren uns auf die partikuläre Lösung und setzen $C = 0$. Mit der oben durchgeführten Substitution $y(x) = 1/z(x)$ erhalten wir schließlich die Lösung der BERNOULLIschen Differentialgleichung (ii):

$$y(x) = \frac{1}{z(x)} = \frac{2}{\sigma^2}\, \frac{(r - \sigma^2/2)}{x} . \qquad \text{(ix)}$$

Daraus folgt mit der ersten Substitution $f'(x) = y(x)$ die Lösung für die ursprüngliche Differentialgleichung (i) durch Integration der Gleichung (ix). Wir erhalten schließlich für die Funktion f die Lösung von Gl. (x):

$$f(x) = \frac{2}{\sigma^2} \left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) \ln(x) + C. \qquad \text{(x)}$$

Die Integrationskonstante C wollen wir mit Hilfe der Endbedingung von Gl. (8) bestimmen. Aufgrund der Transformation von Gl. (9) wird $u(t, x) = h(t)\, \phi(\tau, \xi)$, wobei wir die Funktion $h(t)$ bereits in Gl. (13c) bestimmt haben. Wir kennen jedoch die neue Variable $\tau = g(t)$ noch nicht. Die Funktion $g(t)$ wollen wir später so bestimmen, daß sie am Verfallstag der Option verschwindet, d. h. die Variable τ ist proportional zur Restlaufzeit der Option. Da $h(\mathbb{t}) = 1$ nach Gl. (13c) und $\tau = g(\mathbb{t})$ verschwinden soll, wird am Verfallstag $\xi = f(x)$, und die Endbedingung lautet dann $u(\mathbb{t}, x) = \phi(0, f(x)) = \max\,[0, x - k]$. Damit haben wir sichergestellt, daß die Endbedingung nur von einer „Ortsvariablen" abhängt. Lösen wir $\xi = f(x)$ mit Hilfe von Gl. (x) nach x auf, dann erhält man für die Endbedingung die Beziehung $\phi(0, \xi) = \max\,[0, \exp([\xi - C]\,\beta) - k]$, wobei $\beta \equiv \sigma^2 / [2\, r - \sigma^2]$. Wählt man $C = -\ln(k)/\beta$, dann erhält man die Endbedingung $\phi(0, \xi) = \max\,[0, k\, \{\exp(\xi\, \beta) - 1\}]$ in multiplikativer Form. Setzen wir schließlich den obigen Wert für die Integrationskonstante in Gl. (x) ein, so erhalten wir die Funktion f als Lösung von

Gl. (12a) in der Gestalt von Gl. (13a).

$$f(x) = \frac{2}{\sigma^2}\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)\ln\left(\frac{x}{k}\right). \tag{13a}$$

Die Funktion g läßt sich nun aus Gl. (12b) bestimmen. Leitet man $f(x)$ von Gl. (13a) ein mal ab und setzt den Ausdruck in Gl. (12b) ein, dann erhält man die einfache Differentialgleichung mit der Lösung

$$g'(t) = -\frac{2}{\sigma^2}\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)^2 \Rightarrow g(t) = -\frac{2}{\sigma^2}\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)^2 t + C. \tag{xi}$$

Die Integrationskonstante wird aus der oben erwähnten Bedingung bestimmt, daß die Funktion $g(t)$ am Verfallstag verschwinden soll, d. h. $g(\mathbb{t}) = 0$, und wir folgern für die Konstante C:

$$g(\mathbb{t}) = 0 = -\frac{2}{\sigma^2}\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)^2 \mathbb{t} + C \Rightarrow C = \frac{2}{\sigma^2}\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)^2 \mathbb{t}. \tag{xii}$$

Die Lösung der Bedingung (12b) ergibt demnach die letzte noch zu bestimmende Funktion in der Form

$$g(t) = -\frac{2}{\sigma^2}\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)^2 (t - \mathbb{t}). \tag{13b}$$

Die Gleichungen (13a) - (13c) sind die gesuchten Lösungen für die Variablentransformation von Gl. (9), die zusammengefaßt lautet:

$$\begin{aligned} \tau &= -\frac{2}{\sigma^2}\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)^2 (t - \mathbb{t}), \\ \xi &= \frac{2}{\sigma^2}\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)\left[\ln\left(\frac{x}{k}\right) - \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(t - \mathbb{t})\right], \\ u(t, x) &= \mathrm{e}^{r\,(t-\mathbb{t})}\,\phi(\tau, \xi). \end{aligned} \tag{9$'$}$$

Da die Zeitvariable τ die um eine Konstante gestreckte Verfallszeit der Option mißt, verwandelt sich die Endbedingung in eine Anfangsbedingung für die physikalische Wärmeleitgleichung (14), die durch die Variablentransformation (9)′ aus der partiellen Differentialgleichung (7) folgt:

$$\frac{\partial \phi(\tau,\,\xi)}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 \phi(\tau,\,\xi)}{\partial \xi^2}\text{, mit der transformierten Auszahlungsfunktion}$$

$$\varphi(\xi) = \begin{cases} 0, \text{ falls } \xi \le 0, \\ k\left\{\exp\left(\xi\sigma^2/(2\mathrm{r}-\sigma^2)\right)-1\right\}, \text{ andernfalls.} \end{cases} \tag{14}$$

In der obigen Gleichung wurde die ursprüngliche Auszahlungsfunktion der Kaufsoption, max $[0, x - k]$, durch die für Gl. (13a) getroffene Wahl der Integrationskonstanten in die transformierte Anfangsbedingung, max $[0, k\,\{\exp(\xi\,\beta) - 1\}]$, mit $\beta \equiv \sigma^2 / [2\,r - \sigma^2]$, verwandelt. Zur einfacheren Schreibweise wird dafür die neue Funktion $\varphi(\xi) \equiv \max\,[0, k\,\{\exp(\xi\,\beta) - 1\}]$ gesetzt. Der Definitionsbereich der Zeitvariablen ersteckt sich nun über die positiven reellen Zahlen, d. h. $0 < \tau < \infty$, und jener der Ortsvariablen über den gesamten Bereich der reellen Zahlen (für endliche Werte der Zeitvariablen), d. h. $-\infty < \xi < +\infty$.

Variablenseparation

Da die zweite Randbedingung von Gl. (8) für die analytische Lösung der Differentialgleichung (7) bzw. (14) nicht hilfreich ist, wird hier die Methode der Variablenseparation und nicht etwa die LAPLACE-Transformation gewählt. Wir machen deshalb den Ansatz, daß die transformierte Optionspreisfunktion $\phi(\tau, \xi)$ das algebraische Produkt aus zwei Funktionen ist, von denen jede nur von entweder der Orts- oder Zeitvariablen abhängt, d. h. $\phi(\tau, \xi) = z(\tau)\, y(\xi)$. Die partiellen Ableitungen der Preisfunktion lauten $\partial\phi/\partial\tau = z'(\tau)\, y(\xi)$ und $\partial^2\phi/\partial\xi^2 = z(\tau)\, y''(\xi)$. Nach Einsetzen in Gl. (14) und Umformen erhält man:

$$\frac{z'(\tau)}{z(\tau)} = \frac{y''(\xi)}{y(\xi)} = \lambda. \tag{15}$$

Da der erste Ausdruck nur eine Funktion der Zeitvariablen und der zweite Ausdruck nur eine solche der Ortsvariablen ist, müssen diese beiden gleich einer Konstanten sein, die wir mit λ bezeichnen. Man unterscheidet drei Fälle: Die Konstante ist gleich null, negativ oder positiv. Wie wir sehen werden, resultiert nur eine ökonomisch sinnvolle Lösung, falls die Konstante negativ ist.

ERSTER FALL: $\lambda = 0$. Aus der ersten Differentialgleichung von Gl. (15), $z'(\tau) / z(\tau) = 0$, folgt die Lösung $z(\tau)$ = konstant. Aus der zweiten Differentialgleichung von Gl. (15), $y''(\xi) / y(\xi) = 0$, folgt die Lösung $y(\xi) = C_1\,\xi + C_2$. Somit $\phi(\tau, \xi) = z(\tau)\, y(\xi) = C_1\,\xi + C_2$. Aufgrund der ersten Randbedingung von Gl. (8) muß der Optionspreis verschwinden, wenn der Aktienkurs gegen null strebt. Daraus folgt, daß die transformierte Optionspreisfunktion verschwinden sollte, falls die Ortsvariable gegen minus unendlich strebt, d. h. $\lim_{\xi \to -\infty} \phi(\tau, \xi) = 0$. Dies ist nur möglich, falls die beiden Konstanten C_1 und C_2 verschwinden. Mit anderen Worten, es existiert nur die triviale Lösung $\phi(\tau, \xi) = 0$.

ZWEITER FALL: $\lambda \equiv \omega^2 > 0$ (ω positiv und konstant). Aus der ersten Differentialgleichung von Gl. (15), $z'(\tau) / z(\tau) = \omega^2$, folgt die Lösung $z(\tau) = C_3(\omega) \exp(\omega^2 \tau)$, wobei die Konstantenfunktion von der noch nicht bestimmten Konstanten ω abhängig ist. Für die zweite Differentialgleichung von Gl. (15), $y''(\xi) / y(\xi) = \omega^2$, macht man den üblichen Ansatz: $y(\xi) = \exp(\eta \xi)$, wobei η eine gesuchte Konstante ist. Setzt man diesen Ansatz in die Differentialgleichung ein, so folgt aus dem charakteristischen Polynom $\eta^2 = \omega^2$ die Konstante $\eta = \pm \omega$. Somit $y(\xi) = C_1(\omega) \exp(\omega \xi) + C_2(\omega) \exp(- \omega \xi)$. Die Lösung für den transformierten Optionspreis lautet dann $\phi(\tau, \xi) = z(\tau)\, y(\xi) = \exp(\omega^2 \tau)\, [C_1(\omega) \exp(\omega \xi) + C_2(\omega) \exp(- \omega \xi)]$. Dabei wurde die Konstante $C_3(\omega)$ ohne Verlust an Allgemeinheit gleich eins gesetzt.[4] Aufgrund der ersten Randbedingung, $\lim_{\xi \to -\infty} \phi(\tau, \xi) = 0$, folgt $C_2(\omega) = 0$, und somit für den transformierten Optionspreis $\phi(\tau, \xi) = C_1(\omega) \exp(\omega^2 \tau + \omega \xi)$. Weil der Optionpreis für eine unendlich lange Restlaufzeit nicht größer als der Aktienkurs werden kann und deshalb für *endliche* Aktienkurse beschränkt bleibt, d. h. $\lim_{t \to -\infty} u(t, x) \leq$ x, gilt aufgrund der Transformation aus Gl. (9)′: $\lim_{t \to -\infty} u(t, x) \Rightarrow \lim_{\tau \to \infty} \{C_1(\omega)\, (x/k) \exp([\omega^2 + \omega - 2\, r\, \beta^2/\sigma^2]\, \tau + \omega/\beta)\}$, mit $\beta \equiv \sigma^2/[2\, r - \sigma^2]$. Für endliche Aktienkurse wächst dieser Wert für eine genügend große Konstante ω unbeschränkt an. Wir schließen deshalb diese Lösung als ökonomisch nicht sinnvoll aus.

DRITTER FALL: $\lambda \equiv - \omega^2 < 0$ (ω positiv und konstant). Analog zum zweiten Fall erhalten wir für die erste Differentialgleichung von Gl. (15) die Lösung $z(\tau) = C_3(\omega) \exp(- \omega^2 \tau)$, wobei wiederum die Konstantenfunktion von der noch nicht bestimmten Konstanten ω abhängig ist. Aus der zweiten Differentialgleichung von Gl. (15), $y''(\xi) / y(\xi) = - \omega^2$, folgt mit dem Ansatz $y(\xi) = \exp(\eta \xi)$ für die Konstante η die Lösung $\eta = \pm i \omega$, wobei i die imaginäre Zahl bedeutet, d. h. $i^2 = -1$. Somit $y(\xi) = C_1(\omega) \exp(i \omega \xi) + C_2(\omega) \exp(- i \omega \xi)$. Verwendet man, erstens, die EULERsche Beziehung $\exp(\pm i \omega \xi) = \cos(\omega \xi) \pm i \sin(\omega \xi)$, zweitens die Tatsache, daß sowohl die Real- als auch Imaginärteile je eine fundamentale Lösung bilden, dann kann die Lösung als harmonische Schwingung $y(\xi) = C_1(\omega) \cos(\omega \xi) + C_2(\omega) \sin(\omega \xi)$ geschrieben werden. Schließlich folgt für den transformierten Optionspreis die Lösung $\phi(\tau, \xi) = z(\tau)\, y(\xi) = \exp(- \omega^2 \tau)\, [C_1(\omega) \cos(\omega \xi) + C_2(\omega) \sin(\omega \xi)]$. Dabei wurde wiederum die Konstantenfunktion C_3 ohne Verlust an Allgemeinheit gleich eins gesetzt. In dieser Lösung sind alle positiven Werte der Konstanten ω erlaubt; deshalb muß für die allgemeine Lösung über alle möglichen (Eigen-) Werte der Konstanten ω integriert werden:

$$\phi(\tau, \xi) = \int_0^\infty e^{-\omega^2 \tau} \left[C_1(\omega) \cos(\omega \xi) + C_2(\omega) \sin(\omega \xi) \right] d\omega. \tag{16}$$

Die beiden unbekannten Konstantenfunktionen $C_1(\omega)$ und $C_2(\omega)$ werden mit Hilfe der Anfangsbedingung von Gl. (14) bestimmt. Zu diesem Zweck setzen wir die Zeitvariable in der Gleichung (16) gleich null und schreiben:

---

4 Es werden jeweils zwei Konstanten miteinander mulitpliziert, für deren algebraisches Produkt eine neue Konstante angesetzt werden kann.

$$\varphi(\xi) = \phi(0,\, \xi) = \int_0^{\infty} \left[C_1(\omega)\cos(\omega\xi) + C_2(\omega)\sin(\omega\xi)\right] d\omega. \tag{17}$$

Im vorliegenden Fall kann die obige Integralgleichung mit Hilfe des FOURIERschen Integrals für die transformierte Auszahlungsfunktion der Kaufsoption $\varphi(\xi)$ gelöst werden. Das FOURIERsche Integral existiert, falls $\int |f(x)|\, dx < \infty$. Obwohl $\varphi(\xi)$ diese Bedingung nicht erfüllt, kann das FOURIERsche Integral trotzdem verwendet werden wie sich zeigen wird. Dieses Integral lautet:

$$\begin{gathered}\varphi(\xi) = \int_0^{\infty} \left[A(\omega)\cos(\omega\xi) + B(\omega)\sin(\omega\xi)\right] d\omega, \text{ mit} \\ A(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(s)\cos(\omega s)\, ds,\; B(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(s)\sin(\omega s)\, ds.\end{gathered} \tag{18}$$

Aus dem Vergleich von Gl. (18) mit Gl. (17) folgt, $C_1(\omega) = A(\omega)$ und $C_2(\omega) = B(\omega)$. Einsetzen dieser Ausdrücke in die allgemeine Lösung des tranformierten Kaufsoptionspreises von Gl. (16) ergibt nach Umformen die Gl. (19).

$$\phi(\tau,\, \xi) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} e^{-\omega^2\tau}\, d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(s)\left[\cos(\omega s)\cos(\omega\xi) + \sin(\omega s)\sin(\omega\xi)\right] ds. \tag{19}$$

Durch Verwendung des Additionssatzes für den Cosinus, d. h. $\cos(\beta - \alpha) = \cos(\alpha - \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) + \sin(\alpha)\cos(\beta)$, kann die Gleichung (19) auf Gl. (20) reduziert werden:

$$\phi(\tau,\, \xi) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} e^{-\omega^2\tau}\, d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(s)\cos\!\left(\omega\left[s - \xi\right]\right) ds. \tag{20}$$

Wir wollen zuerst über die Konstante ω integrieren und vertauschen deshalb die Integration:

$$\phi(\tau,\, \xi) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(s)\, ds \int_0^{\infty} e^{-\omega^2\tau}\cos\!\left(\omega\left[s - \xi\right]\right) d\omega. \tag{21}$$

Zur Lösung des zweiten Integrals verwenden wir folgenden Hilfssatz, welcher im Anhang bewiesen wird.

$$\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-\lambda^2 \alpha} \cos(\lambda\beta)\, d\lambda = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\; \mathrm{e}^{-\frac{\beta^2}{4\alpha}},\ (\alpha > 0). \tag{22}$$

Setzt man $\alpha = \tau > 0$, $\lambda = \omega$ sowie $\beta = s - \xi$, und substituiert das Ergebnis von Gl. (22) für das zweite Integral in Gl. (21), dann reduziert sich der transformierte Optionspreis auf den Ausdruck:

$$\phi(\tau, \xi) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(s)\, \mathrm{e}^{-(s-\xi)^2/4\tau}\, ds. \tag{23}$$

Wir setzen schließlich die transformierte Auszahlungsfunktion der Kaufsoption, $\varphi(s)$, gemäß Gl. (14) in die Gleichung (23) ein. Weil $\varphi(s) = 0$ für negative s, brauchen wir nur über den positiven Bereich zu integrieren:

$$\phi(\tau, \xi) = \frac{k}{2\sqrt{\pi\tau}} \int_0^{\infty} \left[\mathrm{e}^{s\sigma^2/2r-\sigma^2} - 1\right] \mathrm{e}^{-(s-\xi)^2/4\tau}\, ds. \tag{24}$$

Im nächsten Schritt führen wir die neue Variable $z = (s - \xi) / \sqrt{(2\,\tau)}$ ein. Damit wird $s = z\sqrt{(2\,\tau)} + \xi$ und $ds = \sqrt{(2\,\tau)}\, dz$. Die neuen Integrationsgrenzen werden dann: $s = 0 \Rightarrow z = -\xi / \sqrt{(2\,\tau)}$ und $s \to \infty \Rightarrow z \to \infty$. Einsetzen in Gl. (24) gibt:

$$\phi(\tau, \xi) = \frac{k}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{\xi}{\sqrt{2\tau}}}^{\infty} \left[\mathrm{e}^{\frac{\left(\sqrt{2\tau}\, z + \xi\right)\sigma^2}{2r-\sigma^2}} - 1\right] \mathrm{e}^{-\frac{z^2}{2}}\, dz. \tag{25}$$

Gleichung (25) die gesuchte Lösung für den transformierten Kaufsoptionspreis $\phi(\tau, \xi)$. Im letzten Schritt soll dieser Preis mit Hilfe von Gl. (9)′ zurücktransformiert werden.

Rücktransformation

Zur einfacheren Schreibweise führen wir für die Restlaufzeit der Option die Bezeichnung $T \equiv t^* - t$ ein. Zuerst setzen wir Zeit- und Ortsvariablen τ und ξ aus Gl. (9)′ in die untere Integralgrenze von Gl. (25) ein, die wir mit $-d_2$ bezeichnen. Als Ergebnis erhält man:

$$-d_2 \equiv -\frac{\xi}{\sqrt{2\tau}} = -\frac{\ln\left(\frac{x}{k}\right) + rT}{\sigma\sqrt{T}} + \frac{\sigma}{2}\sqrt{T}\,. \tag{26}$$

Rechts in Gl. (26) steht der negative Wert der zweiten Grenze in der Optionspreisformel von BLACK UND SCHOLES. Setzt man Zeit- und Ortsvariable sowie den transformierten Optionspreis aus Gl. (25) in die Beziehung von Gl. (9)′ ein, so erhält man für den Preis der Kaufsoption $u(t, x)$ den Ausdruck:

$$u(t, x) = \frac{x}{\sqrt{2\pi}} \int_{-d_2}^{\infty} e^{-\frac{(z-\sigma\sqrt{T})^2}{2}} dz - \frac{k\ e^{-rT}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-d_2}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} dz. \tag{27}$$

Für das erste Integral führen wir die neue Variable $q = z - \sigma\sqrt{T}$ ein. Damit wird $dz = dq$, und die neuen Integrationsgrenzen werden dann: $z = -d_2 \Rightarrow q = -d_2 - \sigma\sqrt{T} \equiv -d_1$ und $z \to \infty \Rightarrow q \to \infty$. Damit wird Gl. (27) zu:

$$u(t, x) = \frac{x}{\sqrt{2\pi}} \int_{-d_1}^{\infty} e^{-\frac{q^2}{2}} dq - \frac{k\ e^{-rT}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-d_2}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} dz. \tag{28}$$

Mit der Definition der GAUSSschen Normalverteilung $\mathcal{N}(x)$

$$\mathcal{N}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{z^2}{2}} dz, \tag{29}$$

folgt, daß die beiden Integrale in Gl. (28) gleich der *komplementären* Normalverteilung $1 - \mathcal{N}(-d_1)$ bzw. $1 - \mathcal{N}(-d_2)$ sind. Wegen der Symmetrie der Normalverteilung gilt $1 - \mathcal{N}(x) = \mathcal{N}(-x)$. Verwendet man die Normalverteilung aus Gl. (29) und die Symmetriebeziehung der Normalverteilung in Gl. (28), dann erhalten wir schließlich die Optionspreisformel von BLACK UND SCHOLES:

$$\begin{gathered} u(t, x) = x\, \mathcal{N}(d_1) - k\, e^{-rT}\, \mathcal{N}(d_2), \text{ mit} \\ d_1 = \frac{\ln\left(\frac{x}{k}\right) + rT}{\sigma\sqrt{T}} + \frac{\sigma}{2}\sqrt{T},\ d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}. \end{gathered} \tag{30}$$

Obwohl die Herleitung der Gl. (30) *keinen* Gebrauch von den beiden Randbedingungen von Gl. (8) gemacht hat, sind diese sowie die Transversalitätsbedingung erfüllt, d. h. $u(t, 0) = 0$, $\lim_{x \to \infty} \partial u(t, x)/\partial x = 1$ und $\lim_{T \to \infty} u(t, x) = x$.

Anhang: Beweis des Hilfssatzes

Zum Beweis des Hilfssatzes von Gl. (22) schreiben wir das Integral als Funktion des Parameters β,

$$I(\beta) \equiv \int_0^\infty e^{-\lambda^2 \alpha} \cos(\lambda \beta)\, d\lambda, \ (\alpha > 0), \tag{I}$$

leiten das Integral von Gl. (I) nach dem Parameter β ab und integrieren partiell, wobei exp(– λ^2 α) λ integriert und sin(λ β) differenziert wird.

$$\begin{aligned} \frac{dI(\beta)}{d\beta} &= -\int_0^\infty e^{-\lambda^2 \alpha} \lambda \sin(\lambda \beta)\, d\lambda = \left[\frac{e^{-\lambda^2 \alpha}}{2\alpha} \sin(\lambda \beta) \right]_0^\infty - \frac{\beta}{2\alpha} \int_0^\infty e^{-\lambda^2 \alpha} \cos(\lambda \beta)\, d\lambda \\ &= -\frac{\beta}{2\alpha} I(\beta). \end{aligned} \tag{II}$$

Dabei verschwindet der Wert der eckigen Klammer. Die Lösung der separierbaren Differentialgleichung (II), $I'(\beta) / I(\beta) = -\beta / (2\alpha)$, lautet $I(\beta) = C \exp(-\beta^2/(4\alpha))$. Die Integrationskonstante, C, läßt sich durch den Wert des Integrals an der Stelle null bestimmen:

$$C = I(0) = \int_0^\infty e^{-\lambda^2 \alpha}\, d\lambda = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \int_0^\infty e^{-s^2}\, ds = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \frac{\sqrt{\pi}}{2}\,. \tag{III}$$

Auf der rechten Seite von Gl. (III) wurde die neue Variable $s = \lambda \sqrt{\alpha}$ eingeführt. Damit ist $d\lambda = ds / \sqrt{\alpha}$ und die neuen Integrationsgrenzen lauten $\lambda = 0 \Rightarrow s = 0$ und $\lambda \to \infty \Rightarrow s \to \infty$. Setzt man schließlich die Konstante in die Lösung der Differentialgleichung ein, so erhält man das Ergebnis des Hilfssatzes von Gl. (22). ▼