

Beilage zum Kapitel 4

Versicherungsprämie, Risikoprämie und Kosten einer Lotterie

Der Zweck dieser Beilage ist die Darlegung des Zusammenhanges zwischen Versicherungsprämie, Risikoprämie und Kosten einer Lotterie an Hand eines einfachen Beispiels der Feuerversicherung. Betrachtet wird die **Lotterie** $G(-z_1, z_2 | \alpha) = G(-z_1, 0 | \alpha)$, wobei $-z_1$ den Schaden aufgrund einer einmaligen Feuersbrunst und α die auf eine bestimmte Zeitperiode bezogene Wahrscheinlichkeit einer einmaligen Feuersbrunst bedeuten. In dieser Lotterie bedeutet das zweite Ereignis $z_2 = 0$, daß mit der Wahrscheinlichkeit $1 - \alpha$ keine Feuersbrunst und deshalb kein Schaden eintritt. Das Anfangsvermögen des Haushaltes, W , sei gleich dem (versicherten) Hauswert. Das zufällige Endvermögen unter Berücksichtigung der Möglichkeit einer Feuersbrunst werde mit \tilde{W} bezeichnet und lautet:

$$\tilde{W} = W + G(-z_1, 0 | \alpha) \quad (1)$$

Der Erwartungswert der betrachteten Lotterie beträgt somit

$$\mathcal{E}\{G(-z_1, 0 | \alpha)\} = -\alpha z_1 + [1 - \alpha] 0 = -\alpha z_1 \quad (2)$$

wobei \mathcal{E} den Erwartungswertoperator bezeichnet.

Wir vergleichen im Folgenden die beiden Möglichkeiten ohne und mit Feuerversicherung, falls als einzelne Zeitperiode für das Eintreten einer Feuersbrunst ein Jahr gewählt wird.

1 Keine Feuerversicherung

Ohne Feuerversicherung beträgt das im Durchschnitt über eine längere Zeitspanne von mehreren Jahren erwartete Endvermögen

$$\mathcal{E}\{\tilde{W}\} = \mathcal{E}\{W + G(-z_1, 0 | \alpha)\} = W - \alpha z_1. \quad (3)$$

Der erwartete Nutzen aus dem Endvermögen unter Berücksichtigung einer einmaligen Feuersbrunst während der Lebensdauer des Hauses beträgt:

$$\mathcal{E}\{U(\tilde{W})\} = \alpha U(W - z_1) + [1 - \alpha] U(W) \equiv U(W_s) \quad (4)$$

wobei W_s das **Sicherheitsäquivalent** des Hauswertes bezeichnet. Das Sicherheitsäquivalent garantiert dem Haushalt den gleichen Nutzen wie jenen, den der Haushalt aus der unvermeidlichen Situation einer möglichen Feuersbrunst zieht.

2 Feuerversicherung

Die Feuerversicherung garantiert dem Versicherten das *sichere* Vermögen im Umfang des Sicherheitsäquivalentes, so daß er mit oder ohne Feuerversicherung den gleichen Nutzen aus dem natürlichen Wagnis einer einmaligen Feuersbrunst zieht. Mit anderen Worten, der Haushalt entledigt sich des Risikos einer einmaligen Feuersbrunst. Der Versicherte bezahlt dabei jährlich die folgende **Versicherungsprämie** π_v .

$$\pi_v = W - W_s \equiv \kappa \quad (5)$$

Mit anderen Worten, die Versicherungsprämie entspricht den **Kosten einer Lotterie**, die wir mit κ bezeichnen. Im Gegensatz dazu lautet die **Risikoprämie** des natürlichen Wagnisses einer einmaligen Feuersbrunst, π :

$$\pi = \mathcal{E}\{\tilde{W}\} - W_s \quad (6)$$

Der Zusammenhang zwischen Versicherungsprämie, Risikoprämie, Kosten der Lotterie und Sicherheitsäquivalent im Falle einer Feuerversicherung wird in der untenstehenden Tabelle 1 zusammengefaßt.

Tabelle 1: Feuerversicherung eines Hauses

Ereignis	Wahrscheinlichkeit	Endvermögen ohne Versicherung (1)	Versicherter		Endvermögen mit Versicherung (4) = (1) + (2) + (3)
			erhält (2)	bezahlt (3)	
Feuer	α	$W - z_1$	$+ z_1$	$-\pi_v = -[W - W_s]$	W_s
Kein Feuer	$1 - \alpha$	W	0	$-\pi_v = -[W - W_s]$	W_s
Erwartungswert		$\mathcal{E}\{\tilde{W}\} = W - \alpha z_1$	$-\pi = -[\mathcal{E}\{\tilde{W}\} - W_s]$		W_s

Bemerkung: Beträge, die der Versicherte von der Versicherung erhält, sind positiv, Beträge, die er der Versicherung bezahlt, sind negativ.

Die Risikoprämie in der letzten Zeile der Tabelle 1 läßt sich folgendermaßen aus den Einträgen in den Kolonnen (2) und (3) zeigen.

$$\begin{aligned} \mathcal{E}\{(2) + (3)\} &= \alpha z_1 + [1 - \alpha] 0 - [\alpha \pi_v + [1 - \alpha] \pi_v] \\ &= -[W - W_s - \alpha z_1] \\ &= -[\mathcal{E}\{\tilde{W}\} - W_s] \\ &= -\pi \end{aligned} \quad (7)$$

Das Ergebnis in der letzten Zeile in der Kolonne (4) der Tabelle 1 folgt sowohl als „Spaltensumme“ aus der Erwartungsbildung der beiden vorhergehenden Zeilen in der gleichen Kolonne als auch aus der Zeilensumme aus den Kolonnen (1), (2) und (3) in der letzten Zeile der Tabelle 1 wie folgt.

$$\begin{aligned}
 (1) + (2) + (3) &= \mathcal{E}\{\tilde{W}\} - \pi \\
 &= \mathcal{E}\{\tilde{W}\} - [\mathcal{E}\{\tilde{W}\} - W_s] \\
 &= W_s
 \end{aligned}
 \tag{8}$$

Die *Risikoprämie*, π , entspricht dem im Durchschnitt über eine längere Zeitspanne von mehreren Jahren bezahlten Betrag des Versicherten an die Versicherung. Sie entspricht deshalb dem im Durchschnitt erzielten *Gewinn* der Versicherung vor Abzug der Aufwendungen durch die Versicherung. Die *Versicherungsprämie*, π_v , beziehungsweise die *Kosten der Lotterie*, κ , entsprechen dem Betrag, den der Versicherte je Zeitperiode der Versicherung bezahlt.